

PRENOVE POUKA MATEMATIKE: CILJI, PASTI IN PRILOŽNOSTI

Dr. Petar Pavešić

petar.pavesic@fmf.uni-lj.si

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

V prispevku bomo strnjeno predstavili, kako so se v zadnjih nekaj desetletjih izmenjavali različni načini poučevanja matematike na preduniverzitetni ravni, v kateri fazi je zdajšnje dogajanje in kam kažejo svetovni trendi. Pred tem bomo podali kratek pregled reform, ki so se zvrstile v preteklih petdesetih letih. Poudarek bo na svetovnih procesih, predvsem v ZDA. V velikem merilu je namreč lažje razbrati glavne mehanizme in spremembe, omogoča nam tudi svojevrsten pogled v prihodnost, saj dogajanje pri nas navadno za nekaj let zaostaja za svetovnim. Na koncu bomo povzeli nekatere bistvene ugotovitve, ki bi jih lahko upoštevali kot vodilo pri prihodnjem prilagajanju pouka matematike potrebam družbe in šolskega sistema.

Pol stoletja matematičnih reform

V prvi polovici prejšnjega stoletja je bil pouk matematike v osnovnih in srednjih šolah večinoma precej uporabno naravnani (temu so rekli »progresivni« pristop). Lep primer iz domačih logov so pred kratkim ponatisnjene računice Franca Močnika. V njih najdemo predvsem veliko število računskih nalog, od preprostih do zelo zapletenih, pogosto s finančno (obresti, zavarovanje,...) ali drugo gospodarsko tematiko. Podobno je tudi pri geometrijskih vsebinah in to je bila raven pouka za večino populacije. Čisto matematičnih vsebin, na primer enačb in neenačb, je bilo malo, funkcijskega pogleda praktično ni bilo. Nasploh je veljalo, da večina populacije ni kos 'akademske' vsebinam, zato je bil zanje primernejši pouk matematike, ki jih je pripravljala na vsakdanje življenje. Manjšina, ki je nadaljevala šolanje na višji gimnazijski ravni, se je učila naprednejšo geometrijo, logaritme in trigonometrične funkcije. Veliko je bilo računanja z logaritemskimi tablicami in tudi »rešenšiber« se je še s pridom uporabljal. Večkrat je mogoče slišati ocene, da je bilo snovi manj kot danes, vendar so jo na koncu vsi temeljito obvladali. V primerjavi z drugimi vedami je bilo videti, da pouk matematike sploh ni zaznal velikanskega napredka znanosti v 19. in 20. stoletju, kar je podobno, kot če bi pri pouku kemije vztrajali na ravni razlage, ki ne bi upoštevala odkritja periodičnega sistema.

Nova matematika

Pomanjkljivosti nezahtevnega, »progresivnega« pouka matematike za »splošno publiko« so se pokazale že med drugo svetovno vojno, ko je naenkrat začelo primanjkovati matematično pismenih častnikov in vojakov, posebej v logistiki, mornarici in artileriji. Razmere so se dodatno zaostriale z izbruhom hladne vojne in oborožitveno tekmo med zahodnim in vzhodnim blokom. Pravi šok je povzročila izstrelitev Sputnika leta 1957, ko se je v ZDA in drugih državah zahodnega bloka razširilo prepričanje, da so začeli zaostajati za SZ v tehnološki tekmi. Načrti, da bi čim hitreje izboljšali kakovost znanstveno-tehnološkega izobraževanja, so privedli tudi do velikih sprememb pri pouku matematike. Pojavila se je »nova matematika«, učni načrti so postali bolj abstraktni in matematično zahtevni. Učitelji naj bi z učenci zelo zgodaj obravnavali formalizem teorije množic (v skrajnih primerih celo pred štetjem!), funkcije in njihove grafe, splošne algebrske strukture, matrike in podobno. Poleg ZDA je bilo pomembno središče prenove Francija, kjer so posebno matematiki, zbrani okoli skupine Bourbaki, vztrajali pri zgodnjem uvajanju matematičnih pojmov, češ da bodo učenci zato pozneje lažje spoznavali naprednejše matematične vsebine. Na višji gimnazijski ravni je glavno spremembo pomenila uvedba diferencialnega in integralnega računa (tako imenovane višje matematike); oba sta bila pred tem skoraj izključno obravnavana le v univerzitetnih tečajih. Tudi v SZ je potekala prenova pouka matematike; vodil jo je eden največjih matematikov dvajsetega stoletja, A. N. Kolmogorov. Bila je dosti bolj konzervativna, saj je ohranila klasični pristop v prvih treh letih šolanja in reformirala le pouk od četrtega do desetega razreda. Posebej odločno so bile zavrnjene prezgodnja vpeljavanja pojmov iz teorije množic in nekatere preabstraktne vsebine iz geometrije in algebre. Nova matematika si je zelo hitro utrla pot v šolske programe in je prav tako hitro izzvala veliko nasprotovanja pri učiteljih in starših, saj se jim je zdela tuja in je pogosto tudi bistveno presejala njihovo lastno matematično znanje. Kljub nekaterim pomembnim uspehom je bil – predvsem zaradi očitnih pretiravanj in nesmislov v začetnih letih šolanja – koncept nove matematike postopno zavrjen in ocenjen kot napaka. Vendar so mnoge pridobitve v višjih razredih osnovne šole in v srednjih šolah ostale v sistemu.

Pomembno je poudariti, da je bil namen prenove upoštevati sodobni razvoj matematike in ustvariti solidno osnovo za druge znanstvene in tehnične discipline. Zgovorno dejstvo je, da so tak razvoj načrtno razširjali, sestavljali programe in pisali učbenike v glavnem raziskovalni matematiki. To se je vidno izražalo v odlični kakovosti učbenikov, njihovi konsistentnosti in matematični korektnosti. Po zatonu nove matematike se je tudi vpliv raziskovalnih matematikov zelo zmanjšal in vajeti so prevzeli tako imenovani edukacionisti. Posledično se je drastično premaknil poudarek z vsebine na formo, od tega, kaj naj se poučuje, na to, kako naj se poučuje.

Vrnitev h koreninam in predreformske razprave

Do sredine sedemdesetih let se je velik del učnih načrtov vrnil v stare tirnice, s poudarjanjem »uporabnih« in izrivanjem »akademičnih« vsebin. Nekateri so celo trdili, da morajo učenci sami opredeliti tempo in način spoznavanja posameznih matematičnih vsebin. Ta stališča so doživela precejšen odpor med starši in učitelji, ki so se bali, da bo to pri učencih povzročilo slabše znanje. Zato so sprva masovno začeli

uvajati preizkusa znanja, ki so bili pogoj za prehod na naslednjo stopnjo šolanja. Vendar je pritisk prenove bil premočan, uporaba preizkusov se je postopoma opuščala in do začetka osemdesetih let je skoraj izginila.

V začetku osemdesetih let se je uveljavilo splošno prepričanje, da pouk matematike in naravoslovja ni ustrezen. Tokrat ni šlo za oborožitveno tekmo z vzhodnim blokom, temveč za visokotehnološko tekmovanje z azijskimi državami, predvsem z Japonsko, katere nagli gospodarski in znanstveni napredek je resno skrbel Američane. Nastala sta dva pomembna dokumenta, *An Agenda for Action in A Nation at Risk*. Avtorji prvega so zagovarjali stališče, da morajo postati glavni cilj pouka matematike problemske strategije in urjenje v reševanju problemov. Pri tem poprej ni treba zagotoviti visoke ravni osnovnih računskih spretnosti in znanja, ker so te v eri kalkulatorjev in računalnikov zastarele. Preizkuse znanja je treba prenoviti in doseči, da se z njimi ne preverjajo le računske spretnosti, temveč splošna naravnost in spretnost v reševanju vsakdanjih problemov. Na višji ravni je treba omejiti vsebine iz odvajanja in integriranja in se tako izogniti potrebi po sistematičnem uvajanju potrebnega predznanja iz algebre in geometrije. Sproščeni čas je treba uporabiti za to, da učenci in dijaki ustvarjalno raziskujejo geometrijske in algebrske prvine v problemih iz realnega sveta. V *A Nation at Risk* so avtorji postavili precej drugačne cilje. Poudarili so potrebo po obvladanju osnovnih računskih spretnosti in po standardiziranih preizkusih znanja za vse prehode na višjo raven šolanja. Posebej so kritizirali nizko raven izobraževalnih programov za učitelje, češ da je v njih premalo matematičnih vsebin in prevelik poudarek na metodah poučevanja in drugih pedagoških vsebinah. Kot velik problem so v ospredje postavili ugotovitev, da večina učiteljev matematike in naravoslovja prihaja izmed diplomantov, ki se po uspešnosti uvrščajo v spodnjo četrtino svoje generacije. Podčrtali so potrebo po konsistentnih in matematično korektnih učbenikih in vabili raziskovalne matematike, člane matematičnih združenj in vrhunske učitelje, da združijo moči pri pripravi novih učbenikov, kot so to že naredili ob začetku uvajanja 'nove matematike'.

Standardi

Leta 1989 je ameriška zveza učiteljev matematike (*National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM) izdala *The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (krajše Standardi). Ti so pomenili začetek novega prenovitvenega vala pri pouku matematike. Kljub imenu, s katerim so se skušali prikupiti delu javnosti, ki je glasno zagovarjal računske spretnosti ter jasne in visoke cilje, ni šlo za standarde v vsakdanjem pomenu besede. V Standardih so naštetih predvsem splošni cilji, ki naj jih učenci dosežejo (se naučijo ceniti matematiko in njene dosežke, zaupajo v svoje matematične sposobnosti, postanejo reševalci matematičnih problemov, se naučijo matematičnega premišljevanja in komuniciranja). Cilji so bili potem podrobneje metodološko razčlenjeni. Teoretična osnova za standarde je temeljila na progresivizmu (matematika mora biti uporabna in jo morajo učenci spoznati predvsem skozi uporabo) ter konstruktivizmu, ki je uporabljal dognanja kognitivne psihologije in poudarjal, da je najbolj učinkovito učenje skozi raziskovanje in odkrivanje. Skratka, učencem naj bi zastavili realne matematične probleme in od njih pričakovali, da sami odkrijejo pot do rešitve. Naloga učitelja je, da jim pomaga in jih vodi skozi ta kognitivni proces, ne pa, da jim posreduje že izdelana matematična

dejstva in metode. Začeli so se opuščati rutinski računski postopki, poštevanka, pisno deljenje, operacije z ulomki in decimalnimi števili, kar naj bi nadomestili z uporabo tehnike – kalkulatorjev in računalnikov. Standardi so vplivali na nastanek velikanske množice tako imenovanih kreativnih prijemov in raziskovalnih načinov poučevanja vseh mogočih področij, od seštevanja in množenja do algebre in trigonometrije. NSF (National Science Foundation) je vložil velikanska sredstva v izdelavo novih učbenikov in delovnih gradiv.

Gledano z današnjimi očmi, je bil učinek predvidljiv. Velika večina učencev ni bila uspešna pri matematičnih odkritjih, hkrati pa si ni razvila osnovnih računskih spretnosti. Vedno večji del pouka je bil posvečen uporabi kalkulatorjev, naraščal je tudi delež vsebin iz statistike in analize podatkov. Vsebine so se pogosto podvajale in ponavljale. Na višjih stopnjah se je manjšal delež formalnega sklepanja in dokazovanja, v učbenikih so se pogosto pojavljale poenostavitve, ki so bile matematično nekorektne ali celo povsem napačne.

Protireformacija

Nasprotniki reforme se niso pustili čakati; matematična skupnost ter mnogi učitelji in starši so zagovarjali stališče, da mora pouk matematike zagotoviti predvsem obvladanje osnovnih računskih spretnosti ter razumevanje osnovnih matematičnih pojmov. Razprave so se iz strokovnih krogov kmalu preselile v javnost in postale tako goreče, da se jih je prijelo ime »matematične vojne«. Izreden vpliv na dogajanje so imele mednarodne raziskave znanja. Pravi šok je povzročil TIMSS 1995, kjer je bil uspeh ameriških učencev v četrtem razredu le malo nad povprečjem sodelujočih, v osmem razredu pod povprečjem, v dvanajstem letu učenja pa prav na repu lestvice. Za to ponižujočo polomijo so ponujali najrazličnejše razlage, od premalo domačih nalog do preveč ur ždenja pred televizijo, od socialnih razmer do slabe opremljenosti šol. Na koncu so kot glavni krivec obveljali Standardi in pouk matematike, ki so ga povzročili. Vedeti moramo, da je skoraj vsaka zvezna država nadrobno opredelila svoj nabor standardov, tako da so imeli po nekaj deset ali celo več kot sto ciljev na vsaki stopnji. Pisni učbeniki so iz komercialnih razlogov to skušali upoštevati in vanje vključiti čim več ciljev iz čim več držav. Pojavljali so se celo več kot sedemsto strani dolgi učbeniki za tretje in četrte razrede! Odpor se je zaradi velikosti in relativno centraliziranega šolskega sistema najprej pojavil v Kaliforniji, posebno v skupnostih z visokim povprečjem izobrazbe, kot je Palo Alto v Silicijevi dolini, kjer so celo dosegli vrnitev tradicionalnih učnih prijemov. Nekateri znani psihologi so javno nasprotovali interpretacijam spoznanj iz kognitivne psihologije, na katere so se sklicevali edukacionisti. Pritiski in razprave so se nadaljevali ter so na koncu prisili NCTM, da je leta 2006 izdal dokument *Curriculum Focal Points*, ki je za vsako stopnjo navedel le osrednje matematične pojme in spretnosti, ki jih je treba obvladati. Seznanji ciljev so v primerjavi s prejšnjimi kratki, naštevajo po tri do pet osrednjih ciljev in povezav za vsako stopnjo. Sočasno so posamezne zvezne države, začenši s Kalifornijo in Massachusettsom, razvile svoje standarde, ki so se postopno združili v *Common Core State Standards* iz leta 2010. Omenjene spremembe so pripeljale do miru (ali vsaj premirja) po matematičnih vojnah.

Nove smeri

Pred zaključkom je treba omeniti še en zanimiv pojav. Prevlada vzhodnoazijskih držav pri mednarodnih raziskavah znanja je privedla do razširjene uporabe »singapurske matematike«, tj. metode poučevanja matematike, ki se opira na učne načrte in učbenike nacionalnega kurikulumu v Singapurju. Osnovne značilnosti tega načina poučevanja so: poudarek na temeljnih računskih spretnostih, nadgrajevanje pridobljenega znanja brez stalnega ponavljanja prejšnje snovi, uporaba skic in modeliranje, razumevanje pomena matematičnih pojmov skozi reševanje besedilnih nalog, matematično utemeljevanje (»dokazovanje«) računskih postopkov in metod. Precej manjši je obseg vsebin iz statistike in analize podatkov. Čeprav je singapurska matematika na prvi pogled tipična vrnitev h koreninam, so v njej prisotne tudi prvine, značilne za prenoviteljske prijeme, predvsem izogibanje tradicionalnemu spiralnemu načinu poučevanja, pri katerem se posamezne vsebine večkrat ponavljajo na vedno višji zahtevnostni stopnji.

Nauk zgodbe

Kaj se je v tem času dogajalo pri nas? Opisani reformni valovi so v slovenske učne programe prihajali s približno desetletno zamudo. Tako je bila, recimo, sredi sedemdesetih let uvedba nove matematike v Sloveniji na višku, ko so jo drugje že skoraj povsem opustili. Tolikšen zamik je bil še razumljiv v času, ko so bile komunikacije omejene in se je z reformnimi procesi ukvarjalo bistveno manj domačih strokovnjakov, danes pa je tak zaostanek popolnoma neupravičen. Ne le strokovnjaki, temveč tudi šolske oblasti bi morale poskrbeti, da čim hitreje analiziramo in upoštevamo tuje izkušnje. Tako nas opisana zgodba opozarja na naslednje:

- Glavni dejavniki v celotnem sistemu so učitelji, učenci, zainteresirana javnost (starši, zaposlovalci, država) in strokovnjaki (tako raziskovalni matematiki kot edukacionisti). Prenova, ki jo kot neustrezno ali nezadostno dojema eden ali več izmed teh dejavnikov, povzroča konflikte, ki lahko pripeljejo do njene okrnitve ali celo propada.
- Razhajanja glede različnih načinov poučevanja matematike se večinoma vrtijo okoli optimalnega razmerja med vsebino in didaktiko pouka. Čeprav načeloma vsi soglašajo, da je treba uravnoteženo upoštevati obe sestavini, je izid v praksi praviloma odvisen od sestave ustreznih komisij oziroma teles. Tako recimo med štiriindvajsetimi člani komisije NCTM, ki je pripravila Standarde, ni bilo niti enega aktivnega matematika, temveč so bili vsi, razen dveh ali treh učiteljev, edukacionisti (kar zelo spominja na merila, po katerih je bila pri nas nazadnje sestavljena skupina, ki je pisala Belo knjigo).
- Pogost argument za vztrajanje na reformni poti je, da nas bo vrnitev k »akademski« matematiki ponovno pripeljala do stanja, ko bo dober del odrasle populacije menil, da gre pri matematiki za neuporabni formalizem in da »jim matematika ni nikoli šla«. Gre brez dvoma za resničen problem, vendar ga ravnanje, ob katerem si marsikdo ne pridobi niti osnovnih računskih spretnosti, bolj kot ne poslabšuje. Po drugi strani pa tisti del učencev, ki bi zmoželi tudi zahtevnejšo raven, že prav na začetku šolanja prikrajšamo za bazično znanje. Kako se bo to odrazilo na njihovi naravoslovni in tehnični

pismenosti?

- Merilo za uspešnost reform NI doseganje ciljev, ki si jih postavijo reformatorji. Uspešnost se (četudi posredno) meri predvsem skozi učinke na znanstveni in gospodarski napredek države, neposredno pa v mednarodnih primerjalnih raziskavah trendov znanja, kot sta TIMSS in PISA. Znotraj šolskega sistema pa sta ključni uspešnost pri nacionalnih preizkusih znanja in čim boljša pripravljenost za prehod na naslednjo stopnjo šolanja in zaposlitev.

Viri

Obseg razprav, ki so zaznamovale obdobje matematičnih vojn, je velikanski. Kot v vsaki vojni skorajda ni srednje poti, temveč prevladujejo ostri zagovorniki nasprotujočih si stališč. Za zainteresirane navajam nekaj virov, ki vsak s svojega zornega kota dobro prikazujejo tako vsebino kot ton razprav.

Anderson, J. L., Reder, L. M. in Simon H. A. (2000). Applications and Misapplications of Cognitive Psychology to Mathematics Education. *Texas Education Review*, 29-49. (Trije vrhunski psihologi menijo, da nekatera ključna stališča konstruktivistov niso v skladu s spoznanji kognitivne psihologije.)

Garelick, B. (2005). An A-Maze-ing Approach To Math. *Education next*, 5. (Pogled matematično podkovanega starša na učinke prenove.)

Klein, D. (2003). A brief history of American K-12 mathematics education in the 20th century. V J. M. Royer (ur.), *Mathematical cognition: a volume in current perspectives on cognition, learning, and instruction*, str. 175–225. Information Age Publishing. (Raziskovalni matematik, kritičen do prenove.)

Schoenfeld, A. H. (2004). The Math Wars. *Educational policy* 18, 253–286. (Matematik edukacionist v podporo prenovi.)

Priporočam še zelo informativno (čeprav precej žolčno) spletno razpravljanje o glavnih spornih točkah prenove.

Budd, K., Carson, E., Garelick, B., Klein, D., Milgram, J. R., Raimi, A. R. in sod., (4. 5. 2005). *Ten Myths About Math Education And Why You Shouldn't Believe Them*. Pridobljeno s <http://www.nychold.com/myths-050504.html>.

Mathews, J. (31. 5. 2005). *10 Myths (Maybe) About Learning Math*. Pridobljeno s http://www.math.rochester.edu/people/faculty/rarm/Mathews_myths.htm.

Raimi, R. A. (31. 5. 2005). *On A Debate Between NCTM and the Civilized World*. Pridobljeno s http://www.math.rochester.edu/people/faculty/rarm/debate_nctm.html.